А Я ДЕЛАЮ ТАК

УПОРЯДОЧЕННЫЙ ПЕРЕБОР ОБЪЕКТОВ

Ordered iterate through

Локшин Александр Александрович, *доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор, кафедра математики и информатики, Институт детства, МПГУ.*

aalokshin@gmail.com

Иванова Елена Алексеевна, *кандидат ф.-м.н., доцент, кафедра математики и информатики, Институт детства, МПГУ.*

eaiva@mail.ru

В заметке обсуждаются сравнительные достоинства и недостатки двух важнейших способов перебора объектов: метода деревьев и алфавитного метода.

Алфавитный метод представляет собой обобщение принципа, на основе которого упорядочены слова в словаре. Приводятся примеры, показывающие удобство использования «алфавитного» метода при решении комбинаторных задач.

The article describes and compares the two most important ways of iterating over arbitrary objects: tree-method and alphabetical method. The alphabetical method is a generalization of words sorting approach in a dictionary. Several examples are presented in the article to demonstrate the convenience of the alphabetical method used in solutions of combinatorial problems.

Ключевые слова: **Дерево перебора, алфавитный принцип, комбинаторные задачи.**

Keywords: **Search tree, alphabetical principle, combinatorial problems.**

Задачи, связанные с необходимостью перебора объектов, часто встречаются в информатике и, более широко, в дискретной математике (когда не удается найти аналитического подхода к решению), встречаются они и в житейской практике – например, при составлении расписаний занятий, составлении маршрутов, выборе действия в разнообразных играх (в шахматах, шашках и др.).

В этой заметке мы разберем сравнительные достоинства и недостатки двух важнейших существующих способов перебора объектов.

1. Деревья. По сравнению с хаотическим (неупорядоченным) способом перебора деревья обладают несомненным преимуществом. При внимательном построении дерева перебора ни один объект не бу-

дет пропущен и не будет повторен дважды. Несомненным достоинством метода является также его универсальность. С помощью построения деревьев можно не только осуществлять перебор объектов, но и описывать структуру разнообразных алгоритмов.

К недостаткам метода при его использовании в процессе перебора относится, в первую очередь, его громоздкость, а также то, что на каждом новом этапе ветвления в общем случае приходится изобретать новый способ разбиения рассматриваемого класса объектов на подклассы.

2 «Алфавитный» метод. Этот метод представляет собой обобщение принципа, согласно которому упорядочены слова в словаре. К достоинствам метода относится его компактность, а также то, что принцип упорядочения объектов не меняется в процессе перебора.

Ниже мы приведем два примера, показывающих удобство «алфавитного» метода в самых разных задачах.

Задача 1. (см. в этой связи, например, [1]). Имеется куб размера 3x3x3, составленный из единичных кубиков. Сколько существует различных путей минимальной длины, соединяющих две противоположные вершины этого куба? (Передвигаться можно только по ребрам единичных кубиков.)

Решение. Обозначим через A вершину куба, расположенную в левом нижнем углу лицевой грани, а через B – вершину куба, расположенную в правом верхнем углу задней грани. Нетрудно видеть, что каждый кратчайший путь из A в B (идущий по ребрам единичных кубиков) имеет длину 3 + 3 + 3 = 9. Для того, чтобы перечислить все такие пути, обозначим через x перемещение вправо на единицу длины, через y – перемещение вглубь на единицу длины, через z - перемещение вверх на единицу длины.

Теперь мы, наконец, в состоянии перечислить все интересующие нас кратчайшие пути из A в B, пользуясь «алфавитным» методом. Итак, рассмотрим все 9-буквенные “слова”, составленные из букв x, y, z. Считаем по определению, что

$x > y > z$.

Кроме того, по определению принимаем словарный принцип сравнения двух “слов”, который демонстрируем на примере. Рассмотрим два “слова”, которые запишем одно под другим, выравнивая их по левому краю:

xxyxyzyzz (1)

xxxzzzyyy (2)

Будем теперь сравнивать буквы “слов” (1) и (2), начиная с левого края. Имеем последовательно: $x = x$, $x = x$, $y < x$.

По определению считаем, что

“слово” (1) < “слово” (2).

Теперь мы можем, наконец, начать перечислять все рассматриваемые “слова” по старшинству (именно в таком порядке они были бы перечислены в словаре):

xxxyyyzzz, xxxyyzyzz, xxxyyzzyz, xxxyyzzzy, xxxyzzyyz, xxxyzzyzy, xxxyzzzyy, …, zzzyyyxxx.

Замечание. Число всех вышеперечисленных “слов”, как можно показать с помощью комбинаторных методов, равно 9!/3!3!3! = 1680.

Задача 2 (Задачи такого типа рассматриваются в курсе "Математика, информатика и методика их преподавания", разработанном А.Л.Семеновым для будущих учителей начальной школы). Пусть у нас имеется неупорядоченный набор, состоящий из трех одинаковых квадратных белых карточек, трех одинаковых треугольных белых карточек и трех одинаковых круглых белых карточек. Требуется перечислить всевозможные различные способы раскраски данного набора карточек, если использовать можно только три цвета: красный, зеленый и синий и каждый из этих цветов должен быть использован трижды.

Решение. В этой задаче, по сравнению с задачей 1, принцип перебора несколько видоизменяется, но основная идея остается прежней.

Итак, примем по определению, что

квадрат > треугольник > круг, (3)

кроме того, будем считать, что

красный цвет > зеленый цвет > синий цвет. (4)

Заметим теперь, что еще до раскраски набор наших карточек можно единственным образом упорядочить по старшинству в соответствии с соглашением (3), выложив вначале три квадрата, затем три треугольника и, наконец, три круга. (Мы говорим о единственности упорядочения фигур по старшинству в соответствии с (3), поскольку пренебрегаем различиями между карточками одной формы.)

Теперь начнем раскрашивать выложенные карточки в соответствии с условиями задачи.

Примем теперь следующее.

Соглашение. Для каждой идущей подряд тройки карточек одной формы (трех квадратов, трех треугольников, трех кругов) условимся раскрашивать их так, чтобы никакая карточка младшего цвета (см.(4)) не лежала левее карточки старшего цвета.

Например, если выложены подряд три треугольника, то вариант расположения

(красный, красный, синий)
допустим, а варианты
(синий, красный, красный);
(красный, синий, синий)
недопустимы.

Итак, в результате принятых соглашений раскрашенные 9 карточек будут непременно разложены следующим образом (какой бы способ раскраски мы ни выбрали):

слева располагаются три квадрата, расположенные в соответствии со старшинством по цвету, за ними – три треугольника, также расположенные по цветовому старшинству, за ними – три круга, расположенные по цветовому старшинству.

Нетрудно заметить, что каждую неупорядоченную раскраску наших карточек, удовлетворяющую условиям задачи, можно расположить указанным выше упорядоченным способом, причем такое расположение будет единственным. (Мы пренебрегаем различием между двумя карточками одного цвета и одной формы). Обратно, каждому упорядоченному расположению раскрашенных карточек, очевидно, всегда соответствует единственное неупорядоченное расположение этих же карточек.

Теперь, наконец, приступим к перечислению способов раскраски наших карточек. Будем пользоваться при этом сокращенной записью, смысл которой объясним на примере.

Запись
ккс кзз жжз

означает, что по порядку выложены два красных квадрата и один синий (ккс), затем -красный треугольник и два зеленых треугольника (кзз), затем – два желтых круга и один зеленый (жжз).

Теперь, если у нас есть две раскраски, например,

ккс кзз жжз, (5)
ккс кжз (6)

то мы, как и в предыдущей задаче, сравниваем их по старшинству, начиная с левого края:

к = к, к = к, с = с, к = к, ж > з. (7)

В результате принимаем, что раскраска (6) старше раскраски (5) и поэтому в перечислении всевозможных раскрасок, удовлетворяющих условию задачи, должна идти раньше.

Итак, мы получили возможность воспользоваться «алфавитным» принципом для перечисления всевозможных интересующих нас раскрасок:

ккк жжж ззз,
ккк жжз жзз,
ккк жзз жжз,
…
ззз жжж ккк.

Нетрудно понять, что такое перечисление значительно более компактно, чем перечисление, представленное в виде дерева.

Выводы. Итак, мы видели, что с точки зрения компактности «алфавитный метод» обладает преимуществами перед «методом деревьев». В то же время «алфавитный метод» является более искусственным, и его применение не так отчетливо вскрывает исходную структуру задачи. На наш взгляд, уверенное владение обоими методами необходимо при изучении школьного курса информатики. В заключение заметим, что «метод деревьев» и «алфавитный метод» при необходимости могут быть применены совместно. Читателю предоставляется возможность придумать соответствующие примеры самостоятельно.

🕮 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Левитас Г.Г. Нестандартные задачи по математике в 3 классе. – М.: ИЛЕКСА, 2008.