МЕТОД КООРДИНАТ В РЕШЕНИИ УЧЕБНЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ РЕАКЦИЙ ИДЕАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

The method of coordinates in the solution of educational problems of statics to determine the reactions of perfect relations

Чибаков Анатолий Сергеевич, *кандидат педагогических наук, заместитель директора по учебной работе, преподаватель, Кировское областное государственное профессиональное образовательное автономное учреждение «Яранский технологический техникум».*

chas375@yandex.ru

В статье рассматриваются возможности и особенности преобразований и решения задач по определению реактивных сил методом координат. Автор устанавливает аналитические зависимости между исходными и искомыми данными в прямоугольной и косоугольной системах координат, комплексной плоскости и полярных координатах. При этом разнообразие и вариативность способов решения задач считаются фактором, способствующим качеству обучения технической механике в учреждении СПО.

The article discusses the possibilities and peculiarities of transformations and solutions of problems to determine reaction forces by the method of coordinates. The author sets forth the analytical dependence between the original and desired data in the rectangular and oblique coordinate systems, the complex plane and polar coordinates. The diversity and variety of ways to solve problems are considered a contributing factor to the quality of teaching technical mechanics in College.

Ключевые слова: **профессиональное обучение в учреждении СПО, методика обучения технической механике, учебные задачи статики, плоская система сходящихся сил, метод координат, геометрические свойства фигур.**

Keywords: **professional training at the College, teaching methods of technical mechanics, educational problems of statics, plane system of concurrent forces, method of coordinates, properties of geometric figures.**

Введение прямоугольной системы координат (ПСК) в плоскую систему сходящихся сил, применение условий равновесия и решение уравнений для проекций сил по осям представляет классический способ определения реакций идеальных связей. Именно в такой последовательности осуществляется обучение студентов учреждений среднего профессионального образования по специальностям технического профиля решению задач статики (раздел теоретической механики) данного типа.

В общем случае исходные условия задачи можно представить в виде, когда установлены (рис. 1):

а) линии действия сил системы (лучи a, b, c) и их общее начало (точка O);

б) углы между линиями действия сил, которые, не умаляя общности, отложим от луча a против хода часовой стрелки (α и β), при этом оба угла находятся в интервале $[0;\ 2\pi)$ и пусть $\alpha < \beta$;

в) направление активной силы, например, усилие пружины ($\overline{P}$);

г) вероятностные направления векторов реакций ($\overline{R_b}$ и $\overline{R_c}$).

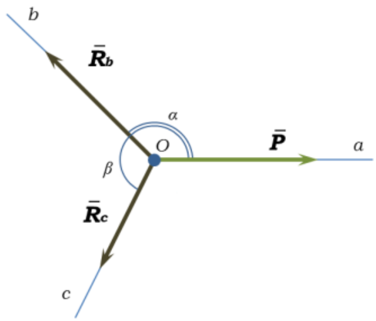

Рис. 1. Вариант представления исходных данных задачи

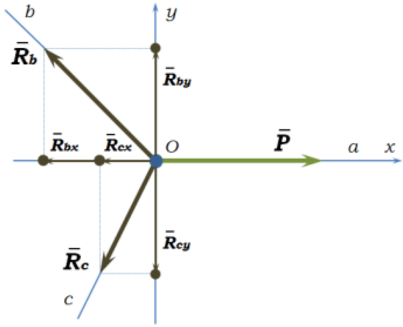

Рис. 2. Введение прямоугольной системы координат и проецирование сил на оси

Выберем за начало ПСК точку O. Ось Ox совместим с лучом a. Спроецируем силы $\overline{P}$, $\overline{R_b}$ и $\overline{R_c}$ на оси Ox и Oy (рис. 2).

Составление и решение уравнений равновесия позволяет в общем виде представить выражения для нахождения искомых реакций $\overline{R_b}$ и $\overline{R_c}$:

$$R_b = \frac{P}{\sin\alpha \cdot ctg\,\beta - \cos\alpha}, \qquad (1)$$

$$R_c = \frac{P}{\sin\beta \cdot ctg\,\alpha - \cos\beta}. \qquad (2)$$

Применение данных формул требует проверки двух условий:

1) определенность функции котангенс по аргументам α и β;

2) недопустимость равенства знаменателей дробей *0*;

Первое условие изменяет интервалы значений углов α и β, исключая равенство *0* и π. Второе условие связано с особенностями расположения лучей b и c, а именно с невозможностью: а) одновременного их совпадения с разными осями координат – Ox и Oy; б) угла между данными лучами, составляющего π.

В том и другом случае, с учетом, что $P \neq 0$, задача в реальности невозможна.

Анализ исходных данных с целью определения реакций идеальных связей в плоскости комплексных чисел (рис. 3) приводит к аналогичным выводам. Преобразуем векторы плоской системы сходящихся сил в комплексную форму [2]:

$$\overline{P} = P,$$

$$\overline{R_b} = Re(R_b) + i \cdot Im(R_b) = R_b \cdot \cos\alpha + i \cdot R_b \cdot \sin\alpha = R_b \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha),$$

$$\overline{R_c} = Re(R_c) + i \cdot Im(R_c) = R_c \cdot \cos\beta + i \cdot R_c \cdot \sin\beta = R_c \cdot (\cos\beta + i \cdot \sin\beta).$$

Аналитические условия равновесия в комплексной плоскости предстают системой двух уравнений для действительной и мнимой частей:

$$\begin{cases} \Sigma X = P + Re(R_b) + Re(R_c) = P + R_b \cdot \cos\alpha + R_c \cdot \cos\beta = 0 \\ \Sigma Y = i \cdot Im(R_b) + i \cdot Im(R_c) = i \cdot (R_b \cdot \sin\alpha + R_c \cdot \sin\beta) = 0 \end{cases}$$

Поскольку $i \neq 0$, то второе уравнение системы перепишется следующим образом:

$$R_b \cdot \sin\alpha + R_c \cdot \sin\beta = 0.$$

Решение данных уравнений приводит к полученным ранее формулам (1) и (2).

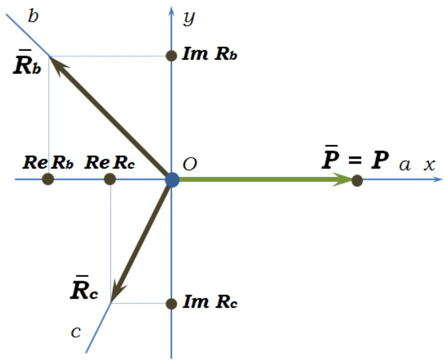

Рис. 3. Перенос условий задачи в комплексную плоскость

Интересным получается решение задачи по определению реакций идеальных связей в полярных координатах.

Пусть полюс совпадает с точкой O, а полярная ось Ox с лучом a (рис. 4).

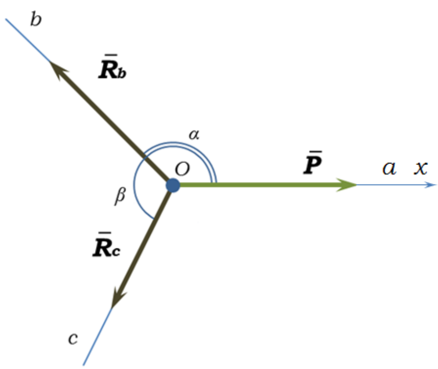

Рис. 4. Перенос условий задачи в полярные координаты

Векторам сил в полярных координатах принято ставить в соответствие пары координат [3], которыми выступают полярный радиус и полярный угол. Так вектору $\bar{P}$ соответствует пара $(P;\ 0)$, вектору $\bar{R_b}$ пара $(R_b;\ \alpha)$, а вектору $\bar{R_c}$ пара $(R_c;\ \beta)$. Суммой векторов $\bar{R_b}$ и $\bar{R_c}$ пусть будет вектор $\bar{S}$, который графически является диагональю параллелограмма, построенного на векторах реактивных сил, как сторонах (рис. 5).

Поскольку по условию задачи система сил $\bar{P}$, $\bar{R_b}$ и $\bar{R_c}$ находится в состоянии равновесия, а в силу выполненных построений сила $\bar{S}$ эквивалентна действию реакций $\bar{R_b}$ и $\bar{R_c}$, то полученная сила $\bar{S}$ является уравновешивающей для активной силы $\bar{P}$. Следовательно, силы $\bar{S}$ и $\bar{P}$ равны по модулю и противоположны по направлению, т.е. $|S| = |P|$, $\bar{S} = -\bar{P}$. Тогда координатами вектора $\bar{S}$ будет пара значений $(P;\ \pi)$.

Рассмотрим силовой треугольник $\bar{R_b}$, $\bar{R_c}$, $\bar{S}$. Его углы определяются (указаны на рисунке) по известным значениям α и β.

Длина диагонали параллелограмма определяется по теореме косинусов:

$$S^2 = R_b^2 + R_c^2 - 2 \cdot R_b \cdot R_c \cdot cos(\pi + \alpha - \beta).$$

А с учетом равенства модулей сил $\bar{S}$ и $\bar{P}$ и формулы привидения $\cos(\pi + \alpha - \beta) = -\cos(\alpha - \beta)$ последнее равенство принимает вид:

$$P^2 = R_b^2 + R_c^2 + 2 \cdot R_b \cdot R_c \cdot cos(\alpha - \beta). \qquad (3)$$

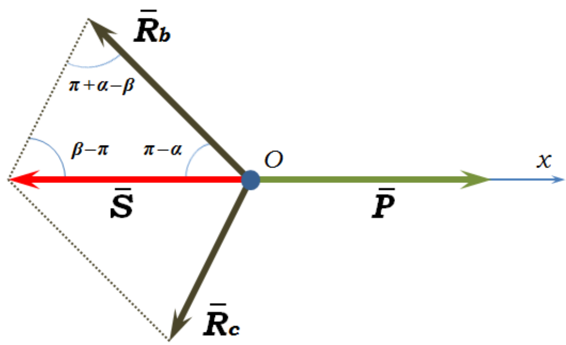

Рис. 5. Геометрические преобразования исходных условий в полярных координатах

В то же время, согласно теореме синусов:

$$\frac{R_b}{\sin(\beta-\pi)} = \frac{R_c}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{S}{\sin(\pi+\alpha-\beta)}$$

или

$$-\frac{R_b}{\sin\beta} = \frac{R_c}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Откуда

$$R_c = P \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}. \qquad (4)$$

Двойное равенство, полученное с помощью теоремы синусов, дает возможность выразить и определить вторую искомую силу – реакцию R_b. И на этом в общем виде задачу можно считать решенной. Но поскольку выполненный анализ силового треугольника и теорема синусов позволяют обойтись без применения какой-либо координатной системы, то продолжим исследование исходных и промежуточных данных в полярных координатах с перспективой поиска решений, которое можно было бы использовать, например, для проверки полученных результатов.

Выполним подстановку последнего равенства в выражение (3) и перейдем к квадратному уравнению с переменной R_b:

$$R_b^2 + 2 \cdot R_b \cdot P \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} \cdot \cos(\alpha-\beta) + P^2 \cdot \left(\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\beta-\alpha)} - 1\right) = 0 .$$

Установленные раннее требования к положению линий действия сил в ПСК, связанное с недопустимостью значения π для угла между лучами b и c, должно выполняться и на этот раз. Кроме того, вспомним, что углы α и β отличны от 0, а также принятое в начале рассуждений условие $\alpha < \beta$. Все это исключает возможность того, что функция $\sin(\beta-\alpha)$ будет равна 0, т.е. требование к значению знаменателя дробей не нарушится.

Дискриминант уравнения находится из выражения:

$$D = 4 \cdot P^2 \cdot \left[\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\beta-\alpha)} \cdot [\cos^2(\alpha-\beta) - 1] + 1\right].$$

Исследование с помощью ЭВМ зависимости между данными в условии задачи углами α и β (с учетом соотношения между ними) и корнями квадратного уравнения позволило прийти к выводу, о том, по какой формуле вычислять реактивную силу R_b в зависимости от угла α. В таблице ниже представлена зависимость между значением угла α и расчетной формулой для R_b.

Таблица 1.

Выбор формулы для определения реакции R_b от значения угла α

Значение угла α	Расчетная формула для определения корня уравнения
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$R_b = \frac{-b-\sqrt{D}}{2 \cdot a}$
$\alpha = \frac{\pi}{2}$	Либо $R_b = \frac{-b-\sqrt{D}}{2 \cdot a}$, либо $R_b = \frac{-b+\sqrt{D}}{2 \cdot a}$, т.к. $D = 0$
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$R_b = \frac{-b+\sqrt{D}}{2 \cdot a}$
$\alpha = \frac{3\pi}{2}$	Либо $R_b = \frac{-b-\sqrt{D}}{2 \cdot a}$, либо $R_b = \frac{-b+\sqrt{D}}{2 \cdot a}$, т.к. $D = 0$
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	$R_b = \frac{-b-\sqrt{D}}{2 \cdot a}$

В качестве уточнения отметим, что коэффициенты перед членами квадратного уравнения в нашем случае составляют: $a = 1$; $b = 2 \cdot P \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} \cdot \cos(\alpha - \beta)$.

Еще более оригинальным выглядит решение задачи по нахождению реакций связей в косоугольной системе координат.

Сориентируем ось Ox вдоль луча b в положительном направлении реакции R_b, а ось Oy проведем по лучу c, одинаково направив с реакцией R_c (рис. 6). Косоугольно спроецируем активную силу P на оси Ox и Oy [3]. По условиям равновесия:

$$R_b = P_x\,,\ \ R_c = P_y\,.$$

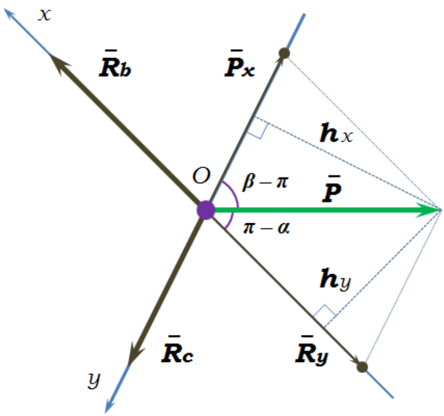

Рис. 6. Введение косоугольной системы координат, проецирование сил на оси и дополнительные построения

В параллелограмме, получившемся на реактивных силах R_b и R_c, из конца вектора P (точка A) построим перпендикуляры к осям Ox и Oy, соответственно h_x и h_y. Тогда площадь параллелограмма можно определить по одной из трех формул:

$$S = P_x \cdot h_x = R_b \cdot h_x\,,$$
$$S = P_y \cdot h_y = R_c \cdot h_y\,,$$
$$S = P_x \cdot P_y \cdot sin(\beta - \alpha) = R_b \cdot R_c \cdot sin(\beta - \alpha)\,.$$

Принимая во внимание, что

$$h_x = P \cdot sin(\pi - \alpha) = P \cdot sin\,\alpha\,,\ \ h_y = P \cdot sin(\beta - \pi) = -P \cdot sin\,\beta\,,$$

зависимости для реактивных сил перепишутся в следующем виде:

$$R_b = -P \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\,,\ \ R_c = P \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}\,.$$

Полученные выражения совпадают с результатами применения теоремы синусов к силовому треугольнику – формула (4).

Таким образом, нами рассмотрены особенности нахождения реакций идеальных связей в прямоугольной и косоугольной системах координат, в комплексной плоскости и полярных координатах. Выход за рамки методов решения задач, традиционно изучаемых в учреждениях СПО, расширяет связи между предметами, интегрирует знания, в том числе по дополнительному физико-математическому образованию, повышает качество профессионального обучения, развивает творческий потенциал и активность личности, формирует компетенции, абстрактное мышление, умения и качества аргументации, универсальные учебные действия [1; 4; 5; 6; 8]. Кроме того, открывается пространство для исследовательской деятельности учащихся [3; 7], организованной индивидуально или в творческих группах, которая может осуществляться самостоятельно или в сотрудничестве с преподавателями.

🕮 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аксенова Г.С. Формирование познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы в процессе изучения математики на основе технологического подхода // Школа будущего. – 2016. – № 2. – С. 20 – 24.
2. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – М.: МЦНМО, 2002. – 40 с.
3. Гельфанд И.М., Глагоголева Е.Г., Кириллов А.А. Метод координат. – 7-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2009. – 184 с.: ил.
4. Крылов Д.А., Чибаков А.С. Развитие аргументативных качеств обучающихся методами СПР при освоении профессиональных модулей // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 6; URL: www.science-education.ru/130-23911
5. Чибаков А.С. Исследование развития познавательной активности учащихся в условиях среднего профессионального образования / А.С. Чибаков // Научный диалог. — 2016. — № 4 (52). — С. 395—408.
6. Чибаков А.С. К оценке качества профессионального обучения: методический аспект // Профессиональное образование. Столица. – 2016. – № 3. – С. 41 – 44.
7. Чибаков А.С. Определение реакций идеальных связей в плоской системе сходящихся сил на основе свойств геометрических фигур // Глобальный научный потенциал. – 2016. – № 10 (67). – С. 28 – 33.
8. Чибаков А.С., Крылов Д.А. Активизация профессионального обучения рабочих совокупностью вопросно-ответных отношений // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 6; URL: www.science-education.ru/130-23834