ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТРИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛЁННОСТИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

THE USE OF THE METRIC DEFINITION OF POLYGONS FOR THE DRAFTING THE GEOMETRIC TASKS OF CONSTRUCTION

Алексеева Елена Евгеньевна, *аспирантка, кафедра элементарной математики и методики обучения математике математического факультета, ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет», преподаватель кафедры математических дисциплин, ГБОУ ВПО МО «Академия социального управления» (АСОУ).*

alekseeva.ok@mail.ru

В исследовании поставлена проблема организации процесса обучения составлению геометрических задач на построение, направленного на развитие познавательных универсальных учебных действий, пространственного и логического мышления учащихся. Показан процесс определения метрической определённости многоугольников и использование её при составлении задач на построение.

In the study is set the problem of the organization of the learning process of drafting the geometric tasks of construction, aimed at the development of cognitive universal educational actions, spatial and logical thinking of students. Also is shown the process of determining the metric definition of polygons and the using of it in the drafting of the tasks of construction.

Ключевые слова: **составление геометрических задач, конструктивные задачи, метрическая определённость фигур, теория геометрических построений, познавательные универсальные действия, многоугольник, условия.**

Keywords: **the drafting of geometric tasks, the tasks of construction, the metric definition of the figures, the theory of geometric constructions, cognitive universal actions, polygon, conditions.**

Общепризнано, что задачи на геометрические построения (конструктивные задачи) являются одним из средств развития пространственного и логического мышления учащихся. В разработку теории геометрических построений внесли вклад такие математики, как Г. Мор, Л. Маскерони, И. Ламберт (1774), Я. Штейнер, К. Гаусс [4]. Достижения учёных, занимавшихся решением проблемы обоснования решения конструктивных задач, систематизированы А. Адлером [1].

В настоящее время элементы теории геометрических построений изучаются в курсе геометрии 7–9 классов. Анализ задачного материала школьных учебников геометрии показал, что в них нет заданий на составление задач на построение. Поэтому учителю целесообразно использовать такие задания в процессе обучения геометрии, в частности для самостоятельной деятельности учащихся. Такая работа будет способствовать достижению учащимися предметных и метапредметных результатов изучения геометрии [3].

Для организации деятельности учащихся на составление задач на построение, учителю необходимо иметь представление о понятии метрической определённости плоских фигур. Согласно Н.Ф. Четверухину, понятие метрической определённости фигуры зависит от числа данных её линейных и угловых величин, позволяющих выполнить построение этой фигуры на плоскости и найти все её неизвестные элементы [5]. При этом следует понимать, что число данных может быть: 1) достаточным; 2) недостаточным; 3) лишним. В первом случае задача считается определённой и построение фигуры возможно. Во втором случае задача считается неопределённой (фигуру построить нельзя или задача имеет бесконечное множество решений), в третьем случае задача переопределена. Таким образом, речь идёт о *метрической определённости изображения*, т.е. об условиях, которые позволяют однозначно определить форму геометрической фигуры, в частности, многоугольника [5].

Для выявления числа (k) условий метрической определённости произвольного многоугольника используется тот факт, что он имеет n вершин. Можно ввести прямоугольную систему координат так, что одна из вершин многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ является её началом (например, A_1), ось абсцисс проходит через соседнюю с началом координат вершину (например, A_2), а ось ординат расположена перпендикулярно стороне A_1A_2 многоугольника. В этом случае координаты: первой вершины многоугольника $A_1(0; 0)$; координаты второй вершины – $A_2(x_2; 0)$, т.е. её расположение задаётся одним условием, расположение других (n – 2) вершин задаётся двумя условиями – абсциссой и ординатой точки (вершины) в этой системе координат. Тогда установлено число условий (k), определяющих n-угольник, а именно, $k = 2\cdot(n - 2) + 1 = 2n - 3$ [5]. На рисунке 1 представлена иллюстрация проведённых рассуждений для выпуклого пятиугольника. Использование этой формулы позволяет выявить число условий метрической определённости конкретного вида многоугольника и применить это понятие для составления учащимися геометрических задач [5].

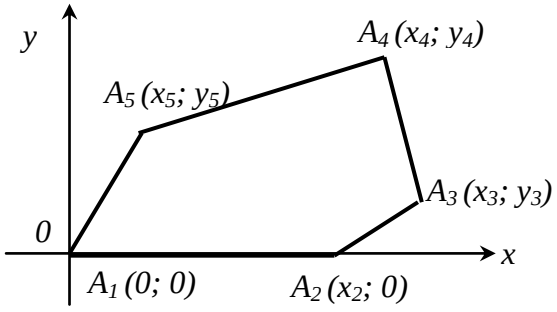

Рисунок 1. Иллюстрация рассуждений

Рассмотрим пример использования установленных фактов для обучения учащихся составлению задач на построение многоугольников. На уроке геометрии в седьмом классе при обучении теме «Геометрические построения», учитель ставит перед учащимися проблему: «Выявить число условий, необходимых для построения произвольного треугольника». Учащимся уже известны признаки равенства треугольников, поэтому они выдвигают гипотезу: возможно, это число равно трём. Далее под руководством учителя учащиеся выполняют поиск числа таких условий, вводя систему координат и производя рассуждения, аналогичные рассмотренным выше, для произвольного треугольника и убеждаются, что это число, действительно равно трём (рис. 2). Далее учащиеся под руководством учителя, обобщая описанный подход к поиску условий метрической определённости треугольников, выводят формулу, по которой можно найти число условий метрической определённости произвольного многоугольника: $k = 2n - 3$, где n – число его вершин. Используя эту формулу, они находят число метрической определённости конкретных произвольных многоугольников, в частности, для произвольного треугольника получают, уже по формуле число три ($k_{\Delta}=2n - 3=2\bullet 3 - 3=3$).

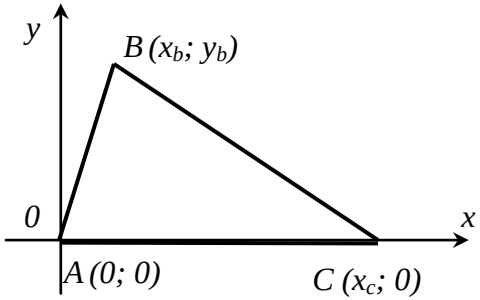

Рисунок 2. Иллюстрация рассуждений для произвольного треугольника

Далее ученики составляют задачи на построение произвольного треугольника, используя различные комбинации трёх элементов треугольника, из которых, хотя бы один – линейный. Например, на основе изученной информации учащиеся составили пять задач, из которых одна отнесена к первому уровню сложности, три – ко второму, одна – к третьему (таблица 1, произвольный треугольник). После этого ученики выбирают задачи для решения, адекватные своему уровню обученности и строят соответствующий треугольник.

Таблица 1.

Комбинации элементов для построения треугольников (7 класс)

Вид многоугольника и число элементов для его построения	**Уровни сложности задач**		
	1 уровень	**2 уровень**	**3 уровень**
Произвольный треугольник – любые три элемента, из кото-	1) стороны	2) две стороны и угол между ними; 3) две	5) две стороны и медиана к третьей стороне; 6)

Вид многоугольника и число элементов для его построения	Уровни сложности задач		
	1 уровень	2 уровень	3 уровень
рых хотя бы один – не величина угла		стороны и высота к одной из них; 4) две стороны и высота к третьей стороне	периметр и 2 угла; 7) медиана, биссектриса и высота к одной стороне (8 класс)
Равнобедренный треугольник – два элемента, из которых хотя бы один – линейный	1) сторона и основание	2) основание и прилежащий к нему угол; 3) боковая сторона и угол при основании; 4) основание и высота к основанию	4) высота к стороне и к основанию; 5) медианы к стороне и основанию; 6) сторона и периметр
Равносторонний треугольник – один линейный элемент	1) сторона	2) медиана (высота, биссектриса)	3) периметр
Прямоугольный треугольник – два элемента, из которых хотя бы один – линейный	1) катеты	2) катет и острый угол; 3) гипотенуза и острый угол	4) гипотенуза и медиана к катету; 5) катет и высота к гипотенузе; 6) медиана к катету и высота к гипотенузе
Равнобедренный прямоугольный треугольник – один линейный элемент	1) катет	2) гипотенуза; 3) высота (медиана, биссектриса) к гипотенузе	4) медиана к катету; 5) биссектриса к катету

В качестве домашнего задания учитель предлагает ученикам провести аналогичное исследование для конкретных видов треугольников, составить различные задачи на их построение и решить по одной задаче для каждого вида треугольника. На следующем уроке организуется фронтальное обсуждение результатов выполнения этого задания. Выясняется, что для составления задач учениками была сформулирована проблема: «Выявить условия метрической определённости конкретных видов треугольников» и выделены этапы её решения: 1) введение системы координат; 2) определение координат вершин; 3) определение количества неизвестных элементов конкретных видов треугольников. Выполнение этапов учащиеся представили на доске (таблица 2).

Таблица 2.

Выявление метрической определённости треугольников конкретного вида

Содержание этапа			
1 этап. Введение системы координат			
A (0; 0) – начало координат; ось *OX* – *AC*; ось OY⊥ *AC*			
2 этап. Определение координат вершин			
а) Δ*ABC*: *AB=BC*; *C* (x_c; 0), *B* (x_b; y_b) т.к. *BH* – медиана, то $x_b = \frac{x_c}{2}$ (рис. 3, а)	б) Δ*ABC*: *AB=BC=AC* *а) C* (x_c; 0); *б) B* (x_b; y_b) т.к. *BH* – медиана, то $x_b = \frac{x_c}{2}$; в) т.к. *BH* – высота, то $y_b = x_c \frac{\sqrt{3}}{2}$ (по теореме Пифагора) (рис. 3, б)	в) Δ*ABC*: ∠*A*=90° *AB* – ось *OY*; *C* (x_c;0), *B* (0; y_b) (рис. 3, в)	г) Δ*ABC*: ∠*A*=90° *AB* – ось *OY*, *AB=AC*; *C*(x_c; 0), *B*(0; y_b), $y_b=x_c$ (рис. 3,с)
3 этап. Определение количества неизвестных элементов			
2 два элемента, из которых хотя бы один – линейный	1 один линейный элемент	2 два элемента, из которых хотя бы один – линейный	1 один линейный элемент

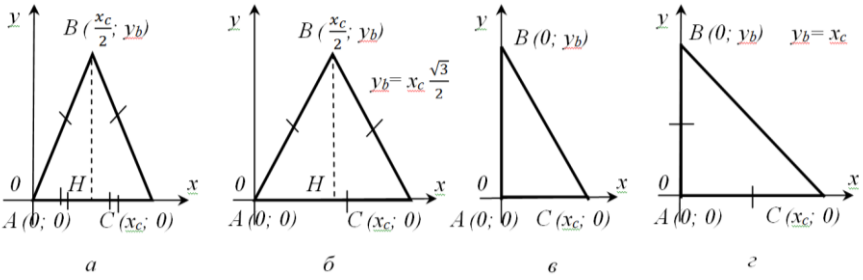

Рисунок 3. Иллюстрация к исследованию

Затем проверяются составленные учениками задачи на построение этих треугольников, обсуждается правомерность распределения задач по уровням сложности. Затем проверяется решение наиболее интересных задач, выполненное в соответствии с известными этапами: анализ, построение, доказательство, исследование. Учитель дополнительно предлагает такие задачи, которые ученики не составили, ученикам предъявляется таблица 1, задачи которой, желающие ученики могут решить дома.

На следующем этапе урока учитель предлагает ученикам выявить связь метрической определённости конкретных видов треугольников с числом признаков, входящих в их определение. В процессе анализа результа-

тов выполнения домашнего исследования ученики под руководством учителя приходят к выводу: 1) при формулировании определений понятий частных видов треугольников, к ближайшему родовому понятию добавляется 1 признак (видовое отличие); 2) при этом число метрической определённости полученного вида треугольника уменьшается на единицу по сравнению с числом метрической определённости треугольника, являющегося ближайшим родовым понятием.

Таблица 3.

Таблица связи метрической определённости многоугольников с числом признаков, входящих в их определение

Вид многоугольника	**Ближайшее родовое понятие и число его метрической определённости**	**Число признаков в определении**	**Число видовых отличий**	**Число элементов для построения (k)**
Произвольный треугольник		1	1	3
Равнобедренный треугольник	Треугольник (3)	треугольник и добавляется один признак	1	2
Равносторонний треугольник	равнобедренный треугольник (2)	равнобедренный треугольник и добавляется один признак	1	1
Прямоугольный треугольник	Треугольник (3)	произвольный треугольник и добавляется один признак	1	2
Равнобедренный прямоугольный треугольник	прямоугольный треугольник (2)	прямоугольный треугольник и добавляется один признак	1	1
Выпуклый четырёхугольник	многоугольник	многоугольник и добавляется один признак	1	n=4 $k_{4\text{-угол.}}=5$
Трапеция	выпуклый четырехугольник (5)	выпуклый 4-х угольник и добавляется один признак	1	4
Параллелограмм	выпуклый четырёхугольник (5)	выпуклый 4-х угольник и добавляется два признака	2	3
Прямоугольник	Параллелограмм (3)	параллелограмм и добавляется один признак	1	2
Ромб	Параллелограмм (3)	параллелограмм и добавляется один признак	1	2
Квадрат	прямоугольник или ромб (2)	параллелограмм и добавляется один признак	1	1
Равнобедренная трапеция	Трапеция (4)	трапеция и добавляется один признак	1	3

На уроках геометрии в 8 классе при изучении темы «Четырёхугольники», в 9 классе – «Правильные многоугольники» учитель проводит работу по определению метрической определённости других многоугольников, например, для произвольного четырехугольника. При проведении этой работы таблица метрической определённости многоугольников дополняется конкретными видами четырёхугольников, изучаемых в курсе геометрии 8–9 классов, которая используется при составлении задач (таблица 3).

Таким образом, составление конструктивных задач на основе понятия метрической определённости фигур с последующим их решением, способствует развитию познавательных УУД, логическому и пространственному мышлению, что соответствует требованиям ФГОС ООО.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Адлер А. Теория геометрических построений. – Л.: Учпедгиз, 1940. – 233 с.
2. Боженкова Л.И. Методическая система обучения геометрии, ориентированная на интеллектуальное воспитание учащихся общеобразовательной школы. Дисс. Докт. пед. наук. – М.:, 2007. – 395 с.
3. Боженкова Л.И., Алексеева Е.Е. Составление задач учащимися, как средство достижения предметных и метапредметных результатов при обучении геометрии. – Наука и школа. – 2013. – № 5. – С. 103–107.
4. Глейзер Г.И. История математики в школе VII–VIII кл. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.
5. Четверухин Н.Ф. Методы геометрических построений. – М.: Учпедгиз, 1952. – 147 с.