О НЕПРЕРЫВНОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ПРИЕМОВ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ

ABOUT CONTINUITY OF STUDYING METHODS OF IDENTICAL TRANSFORMATIONS IN ALGEBRA

Морозов Евгений Анатольевич, *старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ ВШЭ-Пермь.*

morozov75ea@yandex.ru, emorozov@hse.ru

Морозова Алена Витальевна, *старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ ВШЭ-Пермь.*

miss_you@rambler.ru, amorozova@hse.ru

Новоселов Антон Вячеславович, *старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ ВШЭ-Пермь.*

superant@rambler.ru, anovoselov@hse.ru

Статья посвящена рассмотрению особенностей непрерывного изучения приемов тождественных преобразований в школьном курсе математики. Приводится комплекс заданий, отражающий прикладную значимость темы тождественных преобразований в разных разделах курса алгебры.

The article considers the features of continuous studying methods of identical transformations when teaching mathematics at school. The authors present a complex of tasks reflecting practical importance of identical transformations in different divisions of the course in algebra.

Ключевые слова: **тождественные преобразования, систематизация знаний, непрерывность обучения, обучение математике в школе, школьная математика.**

Keywords: **identical transformations, systematization of knowledge, continuous training, teaching mathematics at school, school mathematics.**

Важнейшим видом любой учебной деятельности, в процессе которой учащимися наилучшим образом усваивается теоретический материал, отрабатываются вычислительные умения и навыки, является решение примеров и прикладных задач. Необходимо отметить, что формирование у школьников прочных и глубоких математических знаний во многом зависит от подбора задач и их систематизации.

Основы тождественных преобразований являются фундаментом математических знаний, умений и навыков учащихся для успешного изучения разделов математики в школе, а в дальнейшем математических дисциплин в вузе. Являясь «ядром» (по выражению А.Н. Колмогорова [5]) курса школьной математики, изучению различных преобразований отводится значительная часть учебного времени.

Авторы статьи выделяют три этапа изучения основ тождественных преобразований: пропедевтический, основной и завершающий. Уже в начальной школе вводятся элементарные сведения о переменной и буквенной записи законов арифметических действий на интуитивно-практическом уровне. В курсе математики для начальных классов форми-

руются такие понятия, связанные с алгеброй, как выражение, равенство, числовые и буквенные неравенства, уравнения и формулы, суть которых раскрывается на конкретной основе с использованием арифметического материала. В 5-6-ых классах теоретический материал также излагается на наглядно-интуитивном уровне, математические методы и законы даются в виде правил. В ходе изучения курса учащиеся развивают навыки вычислений с натуральными числами, овладевают навыками действий с обыкновенными и десятичными дробями, получают начальные представления об использовании букв для записи выражений и свойств арифметических действий, составлении уравнений, формируют навыки преобразования выражений. Это первое знакомство носит пропедевтический характер и должно приучить учащихся «работать» с буквенными выражениями при дальнейшем изучении курса алгебры. Особо важно с первых дней учебы, начиная с 1-го класса, прививать учащимся навыки устного счета, как фундамент для изучения любой темы школьного курса математики, в том числе и для совершенствования техники тождественных преобразований.

Начиная с 7-го класса, изучение тождественных преобразований в школьном курсе алгебры систематизируется и углубляется. Учебная программа 7-9-х классов содержит такие темы как одночлены и многочлены, формулы сокращенного умножения, преобразования рациональных выражений, преобразование выражений, содержащих квадратные корни или степень с целым и рациональным показателем и др. Задачами основного этапа изучения основ тождественных преобразований являются: выделение конкретных видов преобразований, систематизация теоретической базы, на которой они основываются, и формирование умений и навыков их применения.

В старшей школе учащиеся овладевают техникой преобразований выражений, содержащих степень с произвольным показателем, с использованием свойств логарифмов, тригонометрических формул, операций дифференцирования и интегрирования. Основной целью изучения темы тождественных преобразований на завершающем этапе является формирование гибкого и мощного математического аппарата, который будет служить для решения задач различного уровня сложности.

Задания на тождественные преобразования алгебраических выражений часто встречаются в вариантах экзаменов, проводимых в форматах ГИА и ЕГЭ, как в качестве отдельных заданий, так и в качестве компонентов заданий при решении алгебраических уравнений и неравенств.

Для успешного изучения математических дисциплин в вузе необходимо овладеть навыками тождественных преобразований, которые, к сожалению, недостаточно отрабатываются в школах. К таковым относятся: избавление от иррациональности в знаменателе, применение формул сокращенного умножения, деление многочленов, выделение целой части, разложение многочленов на множители, выделение полного квадрата в квадратном трехчлене, метод замены, техника алгебраических, логарифмических и тригонометрических преобразований. При недостаточном вла-

дении перечисленными навыками учащийся, будучи студентом, будет испытывать затруднения при изучении математических дисциплин. Это и вычисление пределов функций, и интегральное исчисление, и решение дифференциальных уравнений, и другие разделы высшей математики.

Ниже авторами приводятся задания, отражающие прикладную значимость изучения приемов тождественных преобразований в школьном курсе математики.

Как уже отмечалось, навыки устного счета очень важны. Следует отметить, анализируя результаты ГИА и ЕГЭ, что нынешние выпускники школ имеют средний, а порой и низкий, уровень математической грамотности. У большей массы вычислительные навыки плохо сформированы. Мало кто из учащихся 9-11-х классов может без использования калькулятора, например, вычислить значение $\sqrt{23716}$. Неправильное использование вседоступных технических средств в школе приводит к необучаемости арифметике. Для решения этой проблемы необходимо от урока к уроку отрабатывать вычислительные навыки. Арифметика учит думать, и, как следствие, нельзя понимать алгебру, не зная арифметики [3]. Задания такого класса, как приведенный пример выше, активизируют развитие устного счета у учащихся и позволяют показывать практическую значимость использования тождественных преобразования с использованием формул сокращенного умножения. Так, нетрудно заметить, что $150^2 < 23716 < 160^2$. Среди действительных чисел, квадрат которых оканчивается на «6», из указанного множества могут быть «154» или «156». Применяя формулу сокращенного умножения (квадрата суммы), без труда вычисляем, что $154^2 = (50+4)^2 = 22500+1200+16 = 23716$. Значит, $\sqrt{23716} = 154$. Важной задачей учителя является напоминание учащимся об этом «устном» способе извлечения арифметического квадратного корня при решении квадратных уравнений с помощью дискриминанта.

Одним из применения навыка «избавления от иррациональности» является вывод формулы производной функции $y = \sqrt{x}$ с использованием определения производной:

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

На пропедевтическом уровне полезно из курса высшей математики привести учащимся ряд примеров на исследование свойства непрерывности функций, где умение избавляться от иррациональности лежит в основе метода вычисления пределов неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, $[\infty - \infty]$. Например, вычислить пределы $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x} - 1}$, $\lim\limits_{x \to -3} \frac{2 + \sqrt[3]{x-5}}{x+3}$, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right)$.

В старшей школе при вычислении неопределенных интегралов нередко грамотное владение техникой тождественных преобразований позволяет привести объемные подынтегральные выражения к более простым «табличным» интегралам. Покажем на следующем примере.

Пример. Вычислите интеграл $\int \frac{x\cdot\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}dx$.

Решение: Избавление от иррациональности в знаменателе подынтегрального выражения позволит привести к сумме табличных интегралов:

$$\int \frac{x\cdot\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}dx = \int \frac{x\cdot\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}\cdot\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}dx =$$

$$= -\int \frac{x\cdot\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)^2}{2x\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = x-\arcsin x + C.$$

Ответ: $\int \frac{x\cdot\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}dx = x-\arcsin x + C.$

Отрабатывая навыки использования формулы Ньютона–Лейбница, в качестве примера на применение приема «избавление от иррациональности» можно вычислить определенный интеграл $\int_1^{17}\frac{dx}{\sqrt{x+8}-\sqrt{x-1}}$.

При изучении свойств числовых последовательностей на ознакомительном уровне будет полезно еще раз напомнить о применении формул сокращенного умножения при вычислении таких пределов, как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-n)^4-(2+n)^4}{(2n-1)^3+(3-n)^3}$.

Операция разложения многочлена на множители необходима и при выполнении действий с дробями, и при решении уравнений степени выше второй. При выполнении действий с многочленами учителю необходимо познакомить учащихся с операцией деления многочленов. Это не займет много учебного времени, но в дальнейшем это поможет при упрощении различных алгебраических выражений. Нередко, при вычислении пределов числовых последовательностей и функций приходится раскладывать многочлены на произведение множителей. Например, при нахождении предела функции $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+4x^2-2x-15}{x^2-4x-21}$ [4] для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ посредством операции деления многочлена на многочлен записываем разложение числителя в виде: $x^3+4x^2-2x-15=(x+3)(x^2+x-5)$. Знаменатель с помощью разложения квад-

ратного трехчлена на множители с использованием дискриминанта приводим к виду: $x^2-4x-21=(x+3)(x-7)$. Тогда вычисление предела сводиться к:

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^3+4x^2-2x-15}{x^2-4x-21}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x^2+x-5)}{(x+3)(x-7)}=\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-5}{x-7}=-\frac{1}{10}.$$

В старшей школе на примере вычисления интегралов от «простейших» рациональных выражений, таких, как $\int\frac{dx}{x^2-1}$ и $\int\frac{dx}{x^2-4x+3}$, полезно показать в ознакомительных целях метод неопределенных коэффициентов, при котором знаменатель может быть разложен на множители с помощью операции деления многочленов.

Решение квадратных уравнений имеет важное прикладное значение. Обязательно уже при первом знакомстве учащимся основной школы необходимо сначала на «простейших» уравнениях показать способ нахождения корней, используя разложение на множители левой части при помощи равносильных преобразований: $x^2-4x-21=0\Leftrightarrow(x^2-4x+4)-25=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x-2)^2-5^2=0\Leftrightarrow(x-7)(x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7,\\x=-3.\end{array}\right.$

Затем, выделяя полный квадрат в левой части полного (неприведенного) квадратного уравнения, вывести формулу для нахождения его корней. В частности, аналогичные равносильные преобразования провести для приведенного квадратного уравнения. Обратить внимание учащихся на взаимосвязь разложения квадратного трехчлена на множители с использованием дискриминанта и выделением полного квадрата. Также важно указать практическое значение использование метода разложения на множители при решении квадратных и дробно-рациональных неравенств.

При исследовании квадратичной функции общего вида $y=ax^2+bx+c$ полезно снова напомнить о выделении полного квадрата и проиллюстрировать некоторые правила преобразования графиков (из графика простейшей из квадратичных функций $y=x^2$ построить график функции $y=ax^2+bx+c$).

В интегральном исчислении операция «выделение полного квадрата в квадратном трехчлене» позволит без особого труда приводить многие интегралы к табличным. Например, $\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

или $\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2+2x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}=\arcsin\frac{x-1}{2}+C$.

Интегрирование тригонометрических функций содержит комплекс задач, при решении которых необходимо грамотное использование тригонометрических формул. Это и преобразования с использованием основных тригонометрических тождеств, преобразование произведения тригономет-

рических функций в сумму или разность, понижение степени тригонометрических функций и, конечно же, универсальная тригонометрическая подстановка. Знакомить учащихся с основными тригонометрическими приемами необходимо уже в среднем звене, прививать умения и навыки использования тригонометрических знаний при построении графиков основных тригонометрических функций, при решении простейших тригонометрических уравнений и неравенств, а также при решении планиметрических задач. В связи с этим на учителя возлагается большая работа по подборке базы качественных заданий для систематизации знаний и отработке навыков тригонометрических преобразований. Грамотное применение аппарата тригонометрии при дальнейшем изучении курса алгебры в старшей школе невозможно без владения техники использования тождественных преобразований тригонометрических выражений для упрощения уравнений и неравенств, исследования функций, решения стереометрических задач, и, как следствие, подготовки к единому государственному экзамену. Приведем пример, алгоритм которого подтверждает сказанное выше.

Пример. Найти область значений функции $y = \sin^6 x + \cos^6 x + \cos 2x$ [2].

Решение: Приведем последовательность тождественных преобразований $\sin^6 x + \cos^6 x + \cos 2x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + \cos 2x =$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) + \cos 2x =$$

$$= (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos 2x =$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \cos 2x = 1 - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 2x) + \cos 2x =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2x + \cos 2x = \frac{3}{4}\left(\cos^2 2x + \frac{4}{3}\cos 2x\right) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(\cos 2x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}.$$

Дальнейшие действия по нахождению области значений полученной функции $y = \frac{3}{4}\left(\cos 2x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}$ приводит к ответу.

Ответ: $y \in \left[-\frac{1}{12}; 2\right]$.

Особое внимание в школьном курсе алгебры необходимо уделять методу замены. К сожалению, многие старшеклассники, а в дальнейшем и студенты, забывают об этом способе. Чаще всего замену переменных применяют при решении уравнений или неравенств. И в средней школе, и в старшей школе, в процессе изучения школьной математики учителю надо обращать внимание учащихся на этот метод.

Уже при изучении темы «Арифметические квадратные корни» полезно знакомить учащихся с методом замены переменных, отрабатывая при этом применение формул сокращенного умножения. Так, при упроще-

нии выражения $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$ [1] замена $\sqrt{x}=a$ позволяет привести его к виду $\frac{a+1}{a^3+a^2+a}:\frac{1}{a^4-a}$. Дальнейшие преобразования с использованием формул сокращенного умножения приводят к ответу: $\frac{a+1}{a^3+a^2+a}:\frac{1}{a^4-a}=\frac{(a+1)\cdot(a^3-1)}{a\cdot(a^2+a+1)}=a^2-1=x-1.$

При подготовке к ГИА и ЕГЭ можно давать более сложные задания на тождественные преобразования алгебраических выражений с применением метода замены. Приведем ряд примеров.

Пример. Упростите выражение

$$\left(\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):4\sqrt{b}$$

[6].

Решение: С помощью замены $\sqrt{a}=x$ и $\sqrt{b}=y$ исходное выражение приводим к виду $\left(\frac{2}{x-y}-\frac{2x}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\right):4y$, которое преобразовываем к ответу: $\frac{1}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$.

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$.

Пример. При всех допустимых a и b упростите выражение

$$\left(\frac{3a^{\frac{1}{6}}-2b^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{3}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}\right)\cdot\left(\frac{b^{\frac{1}{6}}\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{a-b}\right)^{-1}.$$

Решение: Удобно ввести замену $a^{\frac{1}{6}}=x,\ b^{\frac{1}{6}}=y$. Тогда исходное выражение примет вид:

$$\left(\frac{3x-2y}{x^2-y^2}-\frac{3}{x+y}\right)\cdot\frac{x^6-y^6}{y\cdot(x^4+x^2y^2+y^4)}=\frac{y}{x^2-y^2}\cdot\frac{(x^2-y^2)\cdot(x^4+x^2y^2+y^4)}{y\cdot(x^4+x^2y^2+y^4)}=1.$$

Ответ: 1.

Порой хорошая замена переменных позволяет без особых усилий находить значения объемных выражений.

Целый класс задач на построение и анализ экономико-математических моделей опирается на определения, графические изобра-

жения и свойства функций, основы которых закладываются на уроках алгебры в школе. Решение таких задач нередко зависит от грамотно проведенных тождественных преобразований, которые могут содержать и элементы тригонометрии, и использование свойств логарифмов. Нередко метод замены переменных позволяет найти рациональное решение.

О замене переменной необходимо говорить не только при решении уравнений и неравенств, заложенных школьной программы, но при нахождении корней уравнений третьей и четвертой степеней, а также при решении уравнений, содержащих иррациональные выражения. Учителю следует показывать и специальные замены переменных, расширяя тем самым математический кругозор учащихся, что в дальнейшем позволит им при изучении математических дисциплин в вузе эффективно применять метод замены.

В заключении хотелось бы еще раз отметить, что приемам выполнения тождественных преобразований алгебраических выражений в школе необходимо уделять особое внимание. Техника преобразований лежит в основе решения уравнений и неравенств, текстовых и геометрических задач. Необходимо развивать культуру выполнения тождественных преобразований. Низкий уровень математической грамотности при обучении в вузе не позволит учащимся изучить такие разделы высшей математики, как дифференциальное и интегральное исчисления, решение дифференциальных уравнений и др. С каждым годом обучения основам математики при изучении новых тем важно на хорошо подобранных примерах показывать значимость тождественных преобразований.

🕮 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Иванов А.А., Иванов А.П. Математика: Пособие для поступающих в вузы. Изд-во Перм. гос. ун-т. – Пермь, 1999. – 284 с.
2. Иванов А.А., Иванов А.П. Тематические тесты для систематизации знаний по математике. – ч. II: Учебн. пособие. Изд.4-е. – М.: Физматкнига, 2006. – 176 с.
3. Иванов А.П. Систематизация знаний по математике в профильных классах с использованием тестов. – М.: Издательство «Физматкнига», 2004. – 416 с.
4. Математический анализ: сб. инд. заданий: по курсу: учеб. пособие / В.В. Логинова, Е.А. Морозов, А.В. Морозова, А.В. Новоселов, Е.Г. Плотникова; под общ. ред. Е.Г. Плотниковой; Перм. гос. Ун-т. – Пермь, 2011. – 284 с.
5. Методика изучения математики в основной школе: курс лекций для организации самостоятельной работы студентов по вопросам частных методик/авт.-сост. Г.Н. Васильева, В.П. Краснощекова, И.С. Цай, Л.Г. Ярославцева; Перм. гос. пед. ун-т. – Пермь, 2011. – 96 с.
6. 3000 конкурсных задач по математике: учеб. пособие /Е.Д. Куланин, В.П. Норин, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. 4-е изд., испр. и доп. – М.: Рольф, 2000. – 624 с.