ОБУЧЕНИЕ СТАРШЕКЛАССНИКОВ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ ПОСРЕДСТВОМ ЦЕЛЕСООБРАЗНО ПОДОБРАННЫХ СИСТЕМ ЗАДАЧ

Краснова Галина Геннадьевна, *старший преподаватель ГАОУ АО ДПО «Астраханский институт повышения квалификации и переподготовки»*

6176@mail.ru

В статье рассмотрен вопрос о создании целесообразно подобранной системы задач по заданной теме. Автор статьи приводит примеры разноуровневых задач к разделу «Уравнения, неравенства», при решении которых используются знания, полученные при изучении раздела «Функции».

Ключевые слова: **система задач, свойства функции, уравнения, функциональный метод**

Изучение математики немыслимо без решения определенного набора задач, соответствующих данному курсу. Задачи используются как очень эффективное средство усвоения школьниками понятий, методов, математических теорий, как наиболее действенное средство развития культуры мышления учащихся, как незаменимое средство привития учащимся умений и навыков в практических применениях математики. Решение задач способствует достижению всех тех целей, которые ставятся перед обучением математике. Д. Пойа считал, что большую роль в повышении эффективности обучения решению задач играет подбор задач, предлагаемых в определенной последовательности, – это должно обеспечить большую самостоятельность учащихся при решении задач на основе использования, в первую очередь, аналогий и сравнений с ранее известными решенными задачами. Поэтому правильно составленная совокупность задач позволяет добиться более прочного и осознанного овладения школьниками математическими знаниями по теме.

Приведем некоторые наиболее существенные требования к системе задач по теме, выделенные Тамарой Ивановной Ивановой [1, 151].

1. Среди упражнений должно быть достаточное число одно-, двухшаговых заданий для реализации этапа осознания, осмысления изучаемых математических объектов и для формирования умственных действий, непосредственно связанных с этими объектами. При отборе содержания упражнений учителю следует руководствоваться следующими принципами: полноты, однотипности, контрпримеров, сравнения, непрерывного повторения, вариативности, единственного различия.

2. При изучении каждой темы формируются вполне определенные общелогические и специфические умения, которые используются далее при изучении теории и решении задач. В системе задач по теме должно быть

достаточное количество задач, направленных на формирование выявленных умений.

3. Чтобы включить знания учащихся в систему, важно среди задач по теме иметь комплексные задачи, т. е. задачи, при решении которых используются знания, полученные при изучении не только данной, но и предыдущих тем, а также при изучении других разделов математики и даже других предметов.

4. В систему задач должны входить и задачи, специально направленные на формирование положительных качественных характеристик ума. Например, задачи с нестандартной постановкой вопроса, с практическим содержанием, задачи, допускающие несколько способов решения, задачи, на основе которых можно составить новые, в частности, обратные задачи, цепочки взаимосвязанных задач и т. д.

5. Задачи всех перечисленных выше видов должны быть рассчитаны на учащихся с различными уровнями подготовленности, т. е. система задач должна обеспечивать соблюдение принципа посильных трудностей.

Соблюдение выделенных требований позволяет, с одной стороны, создать систему задач по теме, отвечающую поставленным целям, и, с другой, – обеспечить дифференцированное обучение в рамках одного класса: одни учащиеся могут получать задачи базового уровня, отвечающих стандарту, а другие – задачи повышенного уровня, из последующих групп, и переходить к комплексным задачам.

Приведем примеры разноуровневых задач, которые можно предложить к разделу «Уравнения, неравенства», при решении которых используются знания, полученные при изучении раздела «Функции».

При решении таких задач происходит исследование возможности решения уравнения (неравенства) различными методами, выделение свойств, присущих функциям, отбор необходимых свойств для решения каждого конкретного уравнения (неравенства). Так, при решении заданий базового уровня используется одно свойство функций, при решении задач повышенного уровня осуществляется выбор нескольких свойств, используется возможность преобразования исходных условий, а при решении задач высокого (творческого) уровня добавляется применение комбинаций известных методов решения и поиск дополнительных данных для подведения задачи под типовой алгоритм. Таким образом, учитель ведет учащихся от предыдущего задания к следующему, постепенно усложняя их.

К заданиям базового уровня мы относим одношаговые задания, позволяющие показать возможность использования свойств, а не только графика функций при решении. Однако и для решения такого задания следует соблюдать определенную последовательность шагов, позволяющую использовать материал другого раздела для решения уравнений и неравенств. Приведем примерную последовательность шагов[2, 286]:

а) определить структуру уравнения (неравенства): выяснить, из каких функций и каким образом оно составлено;

б) выбрать прием решения: исследовать на возможность решения алгебраическим, графическим или функциональным способом, сделать вывод о выборе рационального способа решения;

в) выделить свойства, присущие функциям, входящим в уравнение (неравенство) (ограниченность, монотонность, четность, нечетность и т.д.), то есть использовать материал из раздела «Функции»;

г) решить уравнение (неравенство) с применением выбранных свойств.

Приведем пример заданий базового уровня.

Задача 1. Решить уравнение: $\sqrt{3-x}=\log_5(x-3)$.

Такой тип уравнений знаком учащимся из курса основной школы (например, $\sqrt{x-1}=-x+1$), а также встречался и в курсе старшей школы при изучении раздела «Функции». Следует обратить внимание на то, что в основной школе приоритетным был метод алгебраический (возведения обеих частей уравнения в квадрат), при изучении функций в 10 классе – графический метод, а при изучении раздела «Уравнения, неравенства» одним из часто используемых методов, наряду с аналитическим и графическим, становится функциональный метод.

Однако присутствие логарифма в задаче делает невозможным решение данного уравнения алгебраическим способом. Один из возможных способов решения – графический. Однако построение графиков с использованием преобразований у большинства школьников вызывает затруднения или отнимает много времени. И, кроме того, графический способ не всегда дает точное значение корня.

Для решения этого уравнения будем использовать область определения функций, входящих в его состав. Решив систему неравенств, $\begin{cases}3-x\geq 0,\\ x-3>0;\end{cases}$ убеждаемся, что область определения функций, входящих в состав уравнения, не имеют ни одного общего числа. Поэтому уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Задача 2. Решить уравнение: $\sqrt{x-1}=\log_3(2-x)$.

Обратим внимание на то, что данное уравнение состоит из тех же функций, что и в предыдущей задаче. Однако решить эту задачу с использованием только области определения функций нельзя.

Облегчит решение использование свойства монотонности функций, входящих в уравнение: $y=\sqrt{x-1}$ и $y=\log_3(2-x)$.

Если одна из функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ убывает, а другая возрастает на промежутке X, то на данном промежутке уравнение

$f(x)=g(x)$ либо имеет только один корень, либо вообще не имеет корней. Если мы установим разную монотонность этих функций и каким-то образом подберем (угадаем) один корень уравнения, то, тем самым, полностью решим уравнение [3, 181].

г) Заметим, что левая часть уравнения – возрастающая функция $y=\sqrt{t}$, а правая – убывающая функция $y=\log_5 t$. Применяя свойство монотонности функции, можем утверждать, что больше одного корня такое уравнение иметь не может. Попробуем подобрать корень. Это сделать нетрудно: $x=1$. Итак, $x=1$ – единственный корень.

Ответ: $x=1$.

Замечание. Чтобы процесс подбора корня уравнения не вызывал затруднения, можно использовать области определения функций, входящих в уравнения, то есть найти промежуток X, и уже из этого множества подбирать корень.

Включение таких, казалось бы, однотипных заданий в базовый уровень позволяет показать учащимся возможность выбора необходимого свойства функций для решения каждой конкретной задачи.

Рассмотрим задания повышенного уровня сложности.

В этот блок заданий, как было уже сказано выше, входят задания, при решении которых:

- применяется не одно, а несколько свойств функций;
- выбор применяемого свойства неочевиден (то есть, прежде чем выбирать используемое свойство, необходимо выполнить преобразования);
- существуют разные способы решения в зависимости от используемых свойств.

Задача 3. Решить уравнение: $\log_5(4+x)+\sqrt{2x-1}=2$.

При решении данной задачи используются свойства монотонности и область определения функции. Следует отметить, что и начало решения данного уравнения может осуществляться по-разному. Можно воспользоваться теоремой о сумме двух возрастающих функций, а можно перенести одно из слагаемых в другую часть уравнения и получить функции, имеющие разный характер монотонности. Однако и в том, и в другом случае приходим к выводу, что если уравнение имеет корень, то он единственный. Можно не использовать второе свойство – область определения функции, а действовать методом подбора. Но найдя область определения, мы существенно сужаем промежуток, в котором могут находиться корни этого уравнении. Так, зная, что $x\geq\frac{1}{2}$, мы не проверяем отрицательные корни и

ноль. Поэтому первое число, которое проверяем – это 1. Убеждаемся подстановкой, что $x=1$ является корнем.

Ответ: $x=1$.

Задача 4. Решить уравнение: $\log_{0,2}(2x-1)=2x^2-x-16$.

При решении этой задачи также целесообразно использовать два свойства – область определения и монотонность. Но если в предыдущей задаче было возможно обойтись без нахождения области определения функций, входящих в состав уравнения, то в этой задаче без использования этого свойства не обойтись, так как функция, стоящая в правой части уравнения, на разных промежутках имеет разный характер монотонности.

Заметим, что область определения функции $y=\log_{0,2}(2x-1)$ есть промежуток $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, и функция является убывающей на всей области определения. Функция, стоящая в правой части уравнения – квадратичная, промежутки монотонности зависят от абсциссы вершины параболы (абсцисса вершины параболы $x=\frac{1}{4}$), поэтому функция возрастает на промежутке $\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$, а убывает $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$. Таким образом, мы убеждаемся, что на области допустимых значений уравнения ($x>\frac{1}{2}$)функции, входящие в состав уравнения, имеют разный характер монотонности. Поэтому мы можем утверждать, что на промежутке $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ больше одного корня такое уравнение иметь не может. Попробуем подобрать корень. Это сделать нетрудно: $x=3$. Итак, $x=3$ – единственный корень.

Ответ: $x=3$.

Рассмотрим задания повышенного (творческого) уровня. В решение заданий этого уровня также используется возможность преобразования исходных условий, добавляется применение комбинаций известных методов решения и, часто, поиск дополнительных данных для подведения задачи под типовой алгоритм применения функционального метода.

Задача 5. Решить уравнение: $\frac{\log_4(7x-3)}{\sqrt{40-3x}}=0,5$.

Данная задача по алгоритму решения совпадает с задачей 3. Однако, для того чтобы воспользоваться этим алгоритмом, необходимо найти область определения и выполнить преобразование данного уравнения.

Умножим обе части уравнения на $2\sqrt{40-3x}$, предварительно определив, что область определения данного уравнения промежуток $\left(\frac{3}{7};\frac{40}{3}\right)$. Получим $2\log_4(7x-3)=\sqrt{40-3x}$. Исследуя уравнение, приведенное к такому виду, легко видеть, что его решение будет осуществляться по уже знакомому алгоритму.

Данное уравнение нельзя решить алгебраическим способом. Один из возможных способов решения – графический. Но, как уже говорилось в 1 задаче, построение графиков с использованием преобразований у большинства школьников вызывает затруднение или отнимает много времени. Воспользуемся свойством монотонности, учитывая, что функция $y=2\log_4(7x-3)$ возрастает, а функция $\mathrm{y}=\sqrt{40-3x}$ убывает на промежутке $\left(\frac{3}{7};\frac{40}{3}\right)$, то можем утверждать, что больше одного корня такое уравнение иметь не может. Попробуем подобрать корень из промежутка $\left(\frac{3}{7};\frac{40}{3}\right)$. Проверкой убеждаемся, что $x=5$ является корнем уравнения.

Ответ: $x=5$.

Задача 6. Решить уравнение: $\log_3(\mathrm{x}^2-2x+2)-\log_{0,3}3^{\mathrm{x}^2-2x+1}=0$.

При решении данной задачи используется не только функциональный метод решения уравнения, но и метод замены переменных. Таким образом, необходимо использовать метод замены переменных для преобразования уравнения и решения его по типовому алгоритму функционального метода.

Отметим, что областью определения функций, входящих в левую часть уравнения, является множество всех действительных чисел. Представим уравнение в виде $\log_3((x-1)^2+1)=\log_{0,3}3^{(x-1)^2}$. Осуществим замену: $t=(x-1)^2$, $\mathrm{t}\geq 0$. Получим уравнение $\log_3(t+1)=\log_{0,3}3^t$. Воспользуемся свойством монотонности. Учи-

тывая, что функция $y=\log_3(t+1)$ возрастает, а функция $y=\log_{0,3}3^t$ убывает при $t\geq 0$, то можем утверждать, что больше одного корня такое уравнение иметь не может. Попробуем подобрать корень. Проверкой убеждаемся, что $t=0$ является корнем уравнения. Вернувшись к замене, находим, что $x=1$.

Ответ: $x=1$.

Последняя задача интересна еще и тем, что для ее решения можно воспользоваться другим свойством функций – ограниченностью. Оценим левую и правую части уравнения $\log_3((x-1)^2+1)=\log_{0,3}3^{(x-1)^2}$. Для левой части уравнения: $(x-1)^2+1\geq 1$, $\log_3((x-1)^2+1)\geq 0$. Для правой части: $(x-1)^2\geq 0$, $3^{(x-1)^2}\geq 1$, $\log_{0,3}3^{(x-1)^2}\leq 0$. Таким образом, наименьшее значение, которое может принимать функция в правой части, равно 0; наибольшее значение, которое может принимать функция в левой части, также равно 0. Поэтому уравнение $\log_3((x-1)^2+1)=\log_{0,3}3^{(x-1)^2}$ равносильно системе

$$\begin{cases}\log_3((x-1)^2+1)=0,\\ \log_{0,3}3^{(x-1)^2}=0.\end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет корень $x=1$.

При проверке убеждаемся, что $x=1$ является и корнем второго уравнения.

Включение в систему задач, которые решаются несколькими способами, побуждает учащихся к поиску различных приемов решения задачи, помогает восполнить пробелы в ранее изученных темах, способствует развитию гибкости и критичности мышления учащихся.

В данной статье приведены примеры разноуровневых задач по теме «Логарифмические уравнения», которые позволят не только позаботиться об усвоении базовой составляющей курса алгебры и начал анализа (усвоение изученных правил, формул, методов), но и о реализации одной из главных целей обучения математике – развитию мышления учащихся, в частности, математического. На это и направлена система задач, дифференцированных в зависимости от индивидуальных способностей старшеклассников, использование которой значительно повышает качество полученных знаний у учащихся.

🕮 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Иванова Т.А. Современный урок математики: теория, технология, практика: Книга для учителя. – Н.Новгород: НГПУ, 2010. – 288 с.
2. Краснова Г.Г. Использование монотонности и ограниченности элементарных функций при решении уравнений // Журнал «Казанская наука», 2013, № 9. – с.285-288
3. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики: Учеб.-метод. Пособие / А.Г.Мордкович. – 2-е изд., доп. ипереработ. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2008. – 336 с.